1.1.52 PROPOSITION
Soit u et v des fonctions harmoniques conjuguées, dans un domaine Ω. Soit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que les courbes $u(x,y) = c_1$ et $v(x,y) = c_2$ soient régulières (c-à-d qu'en tout point le gradient est non nul).

Alors ces courbes s'intersectent orthogonalement i.e. les tangentes aux courbes aux points d'intersection sont orthogonanles.

Démonstration: Soit (x_0, y_0) un point d'intersection des courbes $u(x,y) = c_1$ et $v(x,y) = c_2$. Comme le gradient $\operatorname{grad} u(x_0,y_0) = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$ (resp. $\operatorname{grad} v(x_0,y_0) = (\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y})$) est orthogonal à $u(x,y) = c_1$ (resp. à $v(x,y) = c_2$), ces courbes sont orthogonales en (x_0,y_0) si et seulement si les vecteurs $\operatorname{grad} u(x_0,y_0)$ et $\operatorname{grad} v(x_0,y_0)$ sont orthogonaux. Leur produit scalaire est égal à

$$< \operatorname{grad} u(x_0,y_0), \operatorname{grad} v(x_0,y_0) >= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0).\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

puisque u et v satisfont aux conditions de Cauchy-Riemann.

Example : $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$ et $f(z) = u + iv = z^2$

Pour tout $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$ les courbes $u(x,y) = c_1$ et $v(x,y) = c_2$ sont régulières et donc orthogonales.

1.2 Les fonctions élémentaires

1.2.1 La fonction exponentielle

1.2.1 DÉFINITION
Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ on pose $exp(z) = e^z := e^x(\cos(y) + i\sin(y))$.

exp est appelée fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$.

On va étudier l'exponentielle complexe en utilisant pour cela les propriétés des fonctions trigonométriques réelles cos et sin. A la fin de cette partie, on donne une autre méthode, qui n'utilise que l'expression comme série entière de l'exponentielle, elle donne aussi une construction du nombre π.

Propriétés fondamentales

(1) $(exp(z))' = exp(z)$, ainsi $exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$

(2) $exp(v + w) = exp(v)exp(w) \qquad \forall v, w \in \mathbb{C}$

(3) $exp(z) \neq 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

(4) $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$ et $|e^z| = e^{\mathfrak{Re}(z)}$

Démonstration: 1. le parties réelle et imaginaire de exp sont des fonctions de classe C^∞, et vérifient les équations de Cauchy-Riemann d'où $exp \in \mathcal{H}(\Omega)$. D'autre part $exp'(z) = \dfrac{\partial(e^z)}{\partial x} = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) = exp(z)$.

2. Soit $a \in \mathbb{C}$, la fonction $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = e^{a+z}e^{-z}$ est une fonction holomorphe, de dérivée $g'(z) = e^{a+z}e^{-z} - e^{a+z}e^{-z} = 0$, comme $\mathbb{C}$ est un domaine, g est constante ainsi $e^{a+z}e^{-z} = g(-a) = e^a$.
   Soient $v, w \in \mathbb{C}$ on pose $a = v + w$ et $z = -w$ alors la relation précédente nous donne : $e^v.e^w = e^{v+w}$.
3. $exp(z)exp(-z) = exp(z-z) = e^0 = 1$, d'où $exp(z) \neq 0$. Ainsi exp applique $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ et $\frac{1}{exp(z)} = exp(-z)$.
4. $\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos(y) + i\sin(y))} = e^x(\cos(y) - i\sin(y)) = e^x(\cos(-y) + i\sin(-y)) = e^{(x-iy)} = e^{\bar{z}}$.
   Ainsi, $|e^z|^2 = e^z.\overline{(e^z)} = e^z.e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2\mathfrak{Re}\, z} = (e^{\mathfrak{Re}\, z})^2$ et par suite $|e^z| = e^{\mathfrak{Re}\, z}$.

1.2.3 REMARQUE

Une conséquence de (2) et (3) l'application $exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, .)$

1.2.4 PROPOSITION

L'application $exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective et $2i\pi$-périodique.

Démonstration: i) exp est surjective.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$, alors $\frac{z}{|z|} \in C = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$, comme l'application $t \in \mathbb{R}$ associe $e^{it} \in C$ est surjective il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{it}$. Ainsi $z = |z|e^{it} = e^{\ln|z|}e^{it} = e^{\ln|z|+it}$, est l'image d'un nombre complexe par exp.

ii) exp est $2i\pi$-périodique. En effet, $exp(z + 2i\pi) = e^z.e^{2i\pi} = e^z$. ■

1.2.6 Exercice Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = a.exp(bz)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
2. il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $f'(z) = bf(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Retrouver, en utilisant ce résultat, l'identité $exp(z + z') = exp(z)exp(z')$.

1.2.2 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Maintenant on veut étendre la définition des fonctions cosinus et sinus au plan complexe. L'extension de l'exponentielle suggère une façon d'étendre ces fonctions.

1.2.7 DÉFINITION

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{et} \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{1.14}$$

La proposition suivante donne quelques propriétés de ces fonctions

1.2.8 PROPOSITION

i) sin et cos sont des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$.

ii) $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$

iii) $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$

iv) $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z)$ et $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$.

1.2.9 Exercice Démontrer cette proposition.

1.2.10 PROPOSITION
Les zéros de sin dans $\mathbb{C}$ sont les nombres réels $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Les zéros de cos dans $\mathbb{C}$ sont les nombres réels $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration: En se rappelant que $e^{i\pi} = -1$, on a

$$2i\sin(z) = e^{-iz}(e^{2iz} - 1), \qquad 2\cos(z) = e^{i(\pi - z)}(e^{2i(z-\frac{\pi}{2})} - 1),$$

d'où on déduit que $\sin(z) = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 = e^0 \Leftrightarrow z = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.
$\cos(z) = 0 \Leftrightarrow 2i(z - \frac{\pi}{2}) \in 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

On a aussi

1.2.12 DÉFINITION

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \qquad \text{pour} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\} \tag{1.15}$$

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \qquad \text{pour} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \tag{1.16}$$

ces fonctions sont holomorphes dans leurs domaines de définition.

De la même façon on étend les fonction sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique à partir de leurs expressions réelles.

1.2.13 DÉFINITION

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \text{et } \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{1.17}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1.2.14 PROPOSITION

i) sinh et cosh sont des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$.

ii) $\sinh' = \cosh$ et $\cosh' = \sinh$

iii) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

iv) $\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \sinh(w)\cosh(z)$ et
$\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$.

1.2.15 Exercice Démontrer cette proposition.

1.2.16 Exercice Montrer que pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$, et que $|sin(x+iy)|^2 = sin^2(x) + sh^2(y)$.
En déduire que sin n'est pas bornée dans $\mathbb{C}$, et déterminer ses zéros (voir 1.2.10).

1.2.3 Argument et logarithme

1.2.17 DÉFINITION

1) On appelle **argument** d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ tout nombre réel t tel que $e^{it} = \frac{z}{|z|}$.
2) On appelle **logarithme** d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ tout nombre complexe $w \in \mathbb{C}$ tel que $e^w = z$.

1.2.18 REMARQUE

1. Le nombre 0 n'a ni argument ni logarithme.
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Si $w = a + ib$ est un logarithme de z, on aura $e^{a+ib} = z$, $|z| = e^a$ et $e^{ib} = \frac{z}{|z|}$. Ainsi, $a = \ln|z|$ et b est un argument de z et inversement si b est un argument de z, alors $w = \ln|z| + ib$ est un logarithme de z.
   On a donc montré que w est un logarithme de z si et seulement si $\frac{w - \ln|z|}{i}$ est un argument de z.
3. Le nombre complexe $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ a pour argument les nombres réels $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et pour logarithme les nombres complexes $\ln(r) + i\theta + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

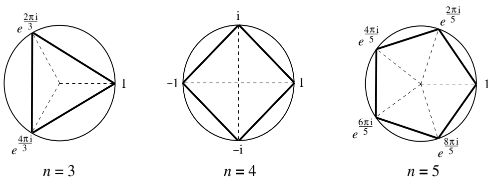
1.2.19 EXEMPLE. Soit à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^n = a$ où n est un nombre entier non nul et a est un nombre complexe non nul. On écrit $a = |a|e^{iarg(a)}$ où $arg(a)$ est un argument de a. L'équation $z^n = a$ entraîne $|z|^n = |a|$ d'où $|z| = |a|^{\frac{1}{n}}$.

On a d'autre part $|z|^n.e^{in\arg(z)} = |a|.e^{i\arg(a)}$, on en déduit que $n\arg(z) = \arg(a) mod(2\pi)$, par suite $\arg(z) = \frac{\arg(a)}{n} mod\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Donc, l'équation $z^n = a$ a n solutions, à savoir $z = |a|^{\frac{1}{n}}.e^{i(\frac{\arg(a)}{n} + \frac{2p\pi}{n})}$, avec $p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Exemples de racines n^{ieme} de l'unité : $a = 1$

- $n = 1$, $\{1\}$
- $n = 2$, $\{1, -1\}$
- $n = 3$, $\{1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\}$
- $n = 4$, $\{1, i, -1, -i\}$



– $n = 5$, $\{1, \zeta = \frac{\sqrt{5}-1+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4\}$

Les racines n^{ieme} de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier.

1.2.20 Exercice Déterminer les racines de $z^3 = i$.

1.2.21 Exercice Soit $n \in \mathbb{N}$ et $G_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$.

1. Montrer que G_n est un sous-groupe cyclique d'ordre n de C^*. En déduire que $G_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Quelle sont les racines n^{ieme} primitives de l'unité c-à-d les complexes ζ tels que $G_n = \{\zeta^p | p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$?

1.2.4 Détermination de l'argument et du logarithme

1.2.22 Définition

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^*$.

1. Une détermination de l'argument dans Ω est une fonction continue $\theta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $z \in \Omega$
$$e^{i\theta(z)} = \frac{z}{|z|}.$$
2. Une détermination du logarithme dans Ω est une fonction continue $l : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour tout $z \in \Omega$
$$exp(l(z)) = z.$$

Ainsi l est une détermination du logarithme si et seulement si θ définie par $\theta(z) = \dfrac{l(z) - \ln|z|}{i}$ est une détermination de l'argument.

La proposition suivante dit que si on connait une détermination du logarithme dans Ω alors on les connaît toutes.

1.2.23 Proposition

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $l : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une détermination du logarithme.

Etant donné une fonction continue $\tilde{l} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\tilde{l}$ est une détermination du logarithme dans Ω.

ii) Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\widetilde{l} = l + 2ik\pi$.

Démonstration: $i) \Rightarrow ii)$ On a $exp(\widetilde{l}(z)) = exp(l(z))$, d'où $exp(\widetilde{l}(z) - l(z)) = 1$ pour tout $z \in \Omega$.

Ceci a pour conséquence que $\widetilde{l}(z) - l(z) \in 2i\pi\mathbb{Z}$ pour tout $z \in \Omega$. Comme la fonction $\frac{\widetilde{l}(z)-l(z)}{2i\pi}$ est continue dans Ω et à valeur dans $\mathbb{Z}$. L'image de Ω est un connexe de $\mathbb{Z}$, donc un singleton de $\mathbb{Z}$. D'où l'existence d'un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\widetilde{l}(z) - l(z) = 2ik\pi$ c-à-d la conditon 2. est satisfaite.
$ii) \Rightarrow i)$ $\widetilde{l}$ est une fonction continue dans Ω et satisfait

$$exp(\widetilde{l}(z)) = exp(l(z))exp(2in\pi) = exp(l(z)) = z$$

pour toutz $\in \Omega$.

Les déterminations du logarithme sont caractérisés par leurs première dérivées.

1.2.25 PROPOSITION
Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^*$ et $l : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une déterminantion du logarithme dans Ω.

Alors, l est holomorphe et $l'(z) = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in \Omega$.

Réciproquement, si $l : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et vérifie $l'(z) = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in \Omega$ et il existe $a \in \Omega$ tel que $exp(l(a)) = a$, alors l est une déterminantion du logarithme.

Démonstration: $i)$ Soit $z_0 \in \Omega$. On pose $w_0 = l(z_0)$ et $w = l(z)$ et en utilisant $exp(l(z)) = z$ et la continuité de l on obtient :
$\displaystyle\lim_{z\longrightarrow z_0} \frac{l(z)-l(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\longrightarrow z_0} \frac{l(z)-l(z_0)}{exp(l(z))-exp(l(z_0))} = \lim_{w\longrightarrow w_0} \frac{w-w_0}{exp(w)-exp(w_0)} = \frac{1}{exp(w_0)} = \frac{1}{exp(l(z_0))} = \frac{1}{z_0}$. D'où $l'(z) = \frac{1}{z}$.

$ii)$ La fonction $g(z) = z.exp(-l(z))$ est holomorphe dans Ω et vérifie $g'(z) = exp(-l(z)) - zl'(z).exp(-l(z)) = exp(-l(z)) - exp(-l(z)) = 0$ pour tout $z \in \Omega$. Comme Ω est connexe, g est constante par suite il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $g(z) = c$ pour tout $z \in \Omega$. Comme $exp(l(a)) = a$, $c = 1$ ce qui entraîne $exp(l(z)) = z$. ∎

1.2.27 Exercice Montrer qu'il n'existe pas de déterminantion du logarithme dans $\mathbb{C}^*$.

1.2.5 Existence de fonctions logarithme

La détermination principale de l'argument et du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

1.2.28 DÉFINITION
L'application $Arg : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \longrightarrow]-\pi, \pi[$ définie par

$$Arg(z) = \begin{cases} Arcos\left(\frac{\Re e(z)}{|z|}\right) & \text{si } \Im m(z) > 0 \\ 0 & \text{si } \Im m(z) = 0 \\ -Arcos\left(\frac{\Re e(z)}{|z|}\right) & \text{si } \Im m(z) < 0 \end{cases}$$

est une détermination de l'argument dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ appelée **détermination principale de l'argument**.

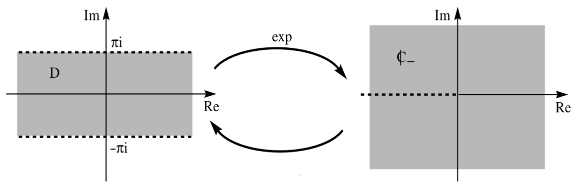
1.2.29 EXEMPLE. Vérifier que Arg est une détermination de l'argument i.e. qu'elle est continue et que pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $e^{iArg(z)} = \frac{z}{|z|}$.

On appelle **détermination princiale du logarithme** dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ l'application

$$\begin{array}{rccc} \ln : & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \ln|z| + iArg(z) \end{array} \tag{1.18}$$

1.2.30 REMARQUE

1. C'est une extension à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. de la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$.
2. Comme elle est holomorphe ses parties réelles et imaginaires, $\ln|z|$ et $Arg(z)$, sont des fonctions harmoniques de classe C^∞.
3. Les autres déterminations du logarithme dans la région $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, sont de la forme $\ln(z) + 2ik\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.
4. Soit $z_0 \in \mathbb{R}_-$. Alors, $\lim\limits_{\substack{z \longrightarrow z_0 \\ Imz>0}} \ln(z) = \ln|z_0| + i\pi$ et $\lim\limits_{\substack{z \longrightarrow z_0 \\ Imz<0}} \ln(z) = \ln|z_0| - i\pi$



1.2.31 Exercice En utilisant la formule $e^z = e^x.e^{iy}$ montrer que :

1. l'image par exp de la droite verticale $\{x = a\}$ est le cercle $C(0, e^a)$ de centre 0 et de rayon e^a
2. l'image par exp de la droite horizontale $\{y = b\}$ est la demi-droite $\{te^{ib}, t > 0\}$.
3. $exp : B_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, \theta_0 - \pi < \mathfrak{Im}(z) < \theta_0 + \pi\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{te^{i(\theta_0 - \pi)}, t > 0\}$ est un difféomorphisme, sa fonction réciproque est une détermination du logarithme dans le domaine $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{te^{i(\theta_0 - \pi)}, t > 0\}$.

1.2.32 EXEMPLE. La fonction $f(z) = f(x + iy) = \frac{1}{2}Ln(x^2 + y^2) + iArctg(\frac{y}{x})$, coïncide avec la détermination du logarithme dans la région $\{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Re} z > 0\}$, car $x^2 + y^2 = |z|$ et $Arctg(\frac{y}{x}) = \theta$ si $x > 0$.

Mais cette fonction n'est pas une détermination du logarithme dans la région $\{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Re} z < 0\}$, car alors $exp(f(z)) = -z$.

1.2.33 Exercice La fonction $\ln(z) := \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n}$ est une détermination du logarithme dans le disque $D(1;1) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-1| < 1\}$.

Solution: La fonction $\lambda(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ est analytique dans le disque $D(1;0) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ et vérifie $\lambda'(z) = \dfrac{1}{1+z}$ dans $D(1;0)$. Par conséquent $\ln(z)$ ainsi définie est égale à $\lambda(z-1)$ est analytique, et donc holomorphe, dans le disque $D(1;1)$ et $\ln'(z) = \lambda'(z-1) = \frac{1}{z}$.

De plus $\ln(1) = 0$, ce qui entraîne $e^{\ln(1)} = 1$. Donc ln est une détermination du logarithme dans le disque $D(1;1)$. ■

1.2.6 Fonctions puissances

1.2.35 Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.
Si $z = e^w$ on dit que $e^{\alpha w}$ est une puissance α de z.
Ainsi, l'ensemble des déterminations de la puissance α de z est égal à $\{e^{\alpha w + 2ik\pi\alpha}, k \in \mathbb{Z}\}$.

1.2.36 Exemple. l'ensemble des puissances $\alpha = i$ de $z = i$ est $\{e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Dès qu'une détermination du logarithme est disponible, on peut introduire les fonctions puissances.

1.2.37 Définition

Soit Ω une région et $l : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une détermination du logarithme. La fonction

$$p_\alpha : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & exp(\alpha(l(z))) \end{array} \tag{1.19}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$, est appelée *détermination de la fonction puissance z^α* basée sur l.

1.2.38 Proposition

Toute fonction puissance P_α est une fonction holomorphe dans Ω et vérifie

1. $P'_\alpha = \alpha P_{\alpha-1}$.
2. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $P_{\alpha+\beta} = P_\alpha P_\beta$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,$P_n(z) = z^n$.

1.2.39 Exercice Soit

$$\begin{array}{rcccc} \ln & : & \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \longmapsto & \ln|z| + iArg(z) \end{array} \quad (1.20)$$

Montrer que dans ce cas, la détermination de z^α, notée z^α, vérifie :
pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, $|z^\alpha| = |z|^{\mathfrak{Re}\alpha} e^{-\arg(z)\mathfrak{Im}\alpha}$ et que $|z^\alpha| \leq |z|^{\mathfrak{Re}\alpha} e^{\pi|\mathfrak{Im}\alpha|}$.

complément : La fonction exponentielle

On va étudier l'exponentielle complexe en utilisant seulement son expression comme série entière. On donne aussi une construction du nombre π.

1.2.40 DÉFINITION

La série entière de terme général $[\frac{z^n}{n!}]$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, i.e. a pour rayon de convergence $+\infty$.

On pose $exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

exp est appelée fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$.

Propriétés fondamentales

(1) $exp(z+z') = exp(z)exp(z') \qquad \forall z,\ z' \in \mathbb{C}$

(2) $exp(z) \neq 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

(3) $(exp(z))' = exp(z)$, ainsi $exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$

(4) pour $x \in \mathbb{R}$, $exp(x) > 0$, et la fonction $exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une bijection strictement croissante. Par définition sa fonction réciproque est la fonction Logarithme Ln.

(5) $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$ et $|e^z| = \mathfrak{Re}\,(e^z)$

Démonstration:

1. On rappel que si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries à termes complexes absolument convergentes alors la série de terme général $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$ est absolument convergente et a pour somme $\sum c_n = \sum a_n \sum b_n$.
   Posons $a_n = \frac{z^n}{n!}$ et $b_n = \frac{z'^n}{n!}$, il vient :
   $$c_n = \sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!}\frac{z'^q}{q!} = \frac{1}{n!}\sum_{p+q=n}\frac{n!}{p!q!}z^p z'^q = \frac{1}{n!}(z+z')^n.$$
   d'où $exp(z)exp(z') = (\sum \frac{z^n}{n!})(\sum \frac{z'^n}{n!}) = \sum c_n = \sum \frac{(z+z')^n}{n!} = exp(z+z')$
2. $exp(z)exp(-z) = exp(z-z) = e^0 = 1$, d'où $exp(z) \neq 0$. Ainsi exp applique $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ et $\frac{1}{exp(z)} = exp(-z)$.
3. c'est un résultat général sur la somme d'une série entière à l'intérieur de son disque de convergence et $(exp(z))' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n-1!}$.
4. Pour $x \in \mathbb{R}$, $exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}$, et $exp(x) = (exp\frac{x}{2})^2 > 0$. D'où $(e^x)' = e^x > 0$, donc $exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}+^*$ est strictement croissante.
   D'autre part $e^x \geq 1 + x$ si $x \geq 0$, par suite $\lim_{x\longrightarrow+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\longrightarrow-\infty} e^x = \lim_{y\longrightarrow+\infty} e^{-y} = \lim_{y\longrightarrow+\infty} \frac{1}{e^y} = 0$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a $exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$.
   En conclusion la fonction $exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une bijection strictement croissante.
5. En utilisant la continuité de la conjugaison complexe, $z \mapsto \bar{z}$, on obtient $\overline{(e^z)} = \overline{(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!})} = \overline{\lim_{n\longrightarrow+\infty}(\sum_{p\leq n}\frac{z^p}{p!})} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{p\leq n}\frac{\bar{z}^p}{p!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\bar{z}^n}{n!} = e^{\bar{z}}$.
   Alors, $|e^z|^2 = e^z.\overline{(e^z)} = e^z.e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2\mathfrak{Re}\,z} = (e^{\mathfrak{Re}\,z})^2$ et par suite $|e^z| = e^{\mathfrak{Re}\,z}$.

Remarque : Une conséquence de (1) et (2) l'application $exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, .)$
Nous allons donner, pour définir l'argument, l'analogue de la proposition **??**, qui va nous permettre de le faire sans admettre les propritétés des fonctions trigonométriques.

1.2.42 PROPOSITION
L'application $\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & C \\ & & t & \longmapsto & \phi(t) = e^{it} \end{array}$

est un homorphisme de groupe surjectif. Son noyau coïncide avec les multiples entiers d'un certain nombre strictement positif noté 2π. En d'autres termes $\ker \phi = \phi^{-1}(\{1\}) = 2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration: On commence par déterminer le noyau de ϕ.

1.2.44 LEMME
Les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont soit fermés, soit partout denses. Les sous-groupes fermés sont : $\mathbb{R}$ et les $a\mathbb{Z}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration: Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
Si $G = 0$ alors $G = 0\mathbb{Z}$.
Supposons que $G \neq 0$. Si $x \in G$ alors $-x \in G$: ainsi G contient un nombre strictement positif. Posons $a = \inf\{x > 0 | x \in G\}$. Deux cas sont possibles

$\boxed{1^{er} \text{ cas : } a > 0.}$

Montrons d'abord que $a \in G$.
Supposons que $a \notin G$, par définition de a, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x \in G$ tel que $a < x < a + \epsilon$.
Alors, pour $\epsilon = a$ il existe $x_0 \in G$ tel que $a < x_0 < a + a = 2a$. Maintenant pour $\epsilon = x_0 - a$, il existe $x_1 \in G$ tel que $a < x_1 < a + (x_0 - a) = x_0$. Comme G est un groupe $x_0 - x_1 \in G$, de plus $0 < x_0 - x_1 < a$, mais ceci contredit la définition de a. D'où $a \in G$.
Soit maintenant $x \in G$. Comme $\mathbb{R}$ est Archimédien il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq x - na < a$. Comme $x - na \in G$, il résulte de la définition de a que l'on a $x = na$. d'où $G \subset a\mathbb{Z}$. L'inclusion opposée étant évidente, il vient $G = a\mathbb{Z}$.

$\boxed{2^{eme} \text{ cas : } a = 0.}$

Cela signifie que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x \in G$, $x > 0$ tel que $0 < x < \epsilon$.
Soit $y \in \mathbb{R}$, comme $\mathbb{R}$ est Archimédien, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq y - nx < x < \epsilon$, d'où y est adhérent à G. On a donc montré que $\overline{G} = \mathbb{R}$. ■
Puisque l'homorphisme ϕ est continu, $\ker \phi = \phi^{-1}(\{1\})$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$.

D'après le lemme précédent $\ker \phi = \mathbb{R}$ ou il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\ker \phi = a\mathbb{Z}$. Comme $\sin(1) > 0$, l'application ϕ n'est pas constante et d'où $\ker \phi \neq \mathbb{R}$ et donc il existe $a \geq 0$ tel que $\ker \phi = a\mathbb{Z}$. D'autre part $\cos(0) = 1$ et $cos(2) \leq 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = -\frac{1}{3}$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $0 < \alpha < 2$ tel que $\cos(\alpha) = 0$ et pour cet α on a

$$1 = |e^{i\alpha}|^2 = \sin^2(\alpha)$$

d'où $\sin(\alpha) = \pm 1$, on a aussi $e^{4i\alpha} = (e^{i\alpha})^4 = i^4 \sin^4(\alpha) = \sin^4(\alpha) = 1$. Par suite $\ker(\phi)$ n'est pas réduit à 0. Donc il existe $a > 0$ tel que $\ker(\phi) = a\mathbb{Z}$.
On définit alors le nombre π par $\pi = \frac{a}{2}$.
Il reste à montrer que l'homorphisme ϕ est surjectif. Il suffit pour cela de montrer que $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. On a $\phi(0) = \cos(0) = 1$ et $\phi^2(\pi) = \phi(2\pi) = 1$ d'où $\phi(\pi) = \pm 1$. Mais, $\phi(\pi) = 1$ entraînerait que $\pi \in 2\pi\mathbb{Z}$; ce qui est absurde. D'où $\cos(\pi) = \phi(\pi) = -1$. Comme la fonction cos est continue et bornée par 1, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Soit $z = x + iy \in C$, alors $|z|^2 = x^2 + y^2 = 1$ ceci nous donne que $-1 \leq x \leq 1$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(t) = x$. Alors $y = \pm\sqrt{1 - x^2} = \pm\sqrt{1 - \cos^2(t)} = \pm \sin(t)$ d'où $y = \sin(t)$ ou $y = \sin(-t)$, par suite $z = \phi(t)$ ou $z = \phi(-t)$. Nous avons montrer que ϕ est surjective.■

Exercice : Montrer que $exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est une application surjective et $2i\pi$-périodique.

Par passage au quotient l'application $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow C$ induit un isomorphisme du groupe quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur C, on note par $\tilde{\phi}$ cet isomorphisme.
Ainsi, l'isomorphisme réciproque associe à tout nombre complexe $z \in C$ un nombre réel, noté $\arg(z)$, défini à l'addition d'un multiple entier de 2π ; on a la relation $z = e^{i \arg(z)}$.
Par abus de langage on notera $\arg(z)$ l'un quelconque de ses réels.

1.2.46 REMARQUE
La restriction de ϕ à $]-\pi, \pi[$ est un homéomophisme sur $C - \{-1\}$ où $C = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$.

1.2.47 DÉFINITION
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On définit l'argument de z par la formule $\arg(z) = \arg\left(\frac{z}{|z|}\right)$.

La formule $|zz'| = |z||z'|$ montre que le cercle unité, $C = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ est un groupe pour la multiplications des complexes, l'inverse de $z \in C$ est $\bar{z}$.
Si l'on pose $\phi(t) = e^{it}$ pour $t \in \mathbb{R}$, alors $|\phi(t)| = e^0 = 1$, on définit ainsi un homorphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(C, .)$.
On définit les fonctions cosinus et sinus réelles par : $\cos(t) = \mathfrak{Re}(e^{it})$ et $\sin(t) = \mathfrak{Im}(e^{it})$. On retrouve alors, $\cos(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$, $\sin(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.